割圜連比例術圖解

割圓連比例術圖解三卷爲方立遺書之一方立生五歲曉九九數年十八與同里張彥惟共治算學盡通諸家法又十年居京師識秀水朱鍔麓時出所得相質學益進逾年迺成是書又二年復成橢圓求周術一卷斜弧三邊求角補術一卷堆垛求積術一卷余故不通算術而鍔麓彥惟二君皆專門學也二君於是書推許甚至爰以冠彙書之首其後成三術亦並以次附焉道光三年冬十月三日基誠序

割圜連比例術圖解序

董方立遺書一

元郭守敬授時草用天元術求弧矢徑一圍三猶仍舊率西人以六宗三要二簡術求八線理密數繁凡遇布算皆資於表梅文穆公赤水遺珍載西士杜德美圜徑求周諸術語焉不詳罕通其故嘗欲更創通法使弦矢與弧可以徑求覃精累年迄無所得己卯春秀水朱先生鴻以杜氏九術全本相示蓋海甯張先生豸冠所寫者九術以外別無圖說閣陳氏際新嘗爲之注爲某氏所祕書已不傳適反覆尋繹究其立法之原蓋卽圜容十八觚之術引伸類長求其絫積實兼差分之列衰商功之堆垜而會通以盡句股之變周髀經曰圜出於方

方出於矩矩出於九九八十一圜弧也方弦矢也九九八十一遞加遞減遞乘遞除之差也方圓者天地之大體奇耦相生出於自然今得此術而方圓之率通矣爰分圖著解冠以九術原文並立弦矢互求四術都為三卷辭取易明有傷蕪冗其所未寤俟有道正焉嘉慶二十四年夏四月陽湖董祐誠

割圜連比例術圖解卷上

陽湖董祐誠

第一術

圜徑求周

術曰以徑三乘之爲第一數次置第一數四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數九乘之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數二十五乘之四除之又六除之七除之爲第四數次置第四數四十九乘之四除之又八除之九除之爲第五數次置第五數八十一乘之四除之又十除之十一除之爲第六數若以千萬爲圜徑則求至第十一數并之得三千一百四

十一萬五千九百二十六即圜周

第二術

通弧求通弦

術曰以通弧爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率通弧爲第二率二率自乘一率除之得第三率次置第一數以三率乘之一率除之得第四率四除之又二除之三除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率四除之又四除之五除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率四除之又六除之七除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減

所餘卽通弦

第三術

通弧求矢

術曰以半徑爲連比例第一率通弧爲第二率二率自乘一率除之得第三率四除之又二除之爲第一數寄左次置第一數以三率乘之一率除之得第五率四除之又三除之四除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四除之又五除之六除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第九率四除之又七除之八除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左

右相減所餘卽矢

第四術

弧背求正弦

術曰以弧背爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率弧背爲第二率二率自乘一率除之得第三率次置第一數以三率乘之一率除之得第四率二除之三除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率四除之五除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率六除之七除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘卽正弦

第五術

弧背求正矢

術曰以半徑爲連比例第一率弧背爲第二率二率自乘一率除之得第三率二除之爲第一數寄左次置第一數以三率乘之一率除之得第五率三除之四除之爲第二數應減寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第七率五除之六除之爲第三數應加寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第九率七除之八除之爲第四數應減寄右第一數第三數相并第二數第四數相并左右相減所餘卽正矢

第六術

通弦求通弧

術曰以通弦爲第一數次以半徑爲連比例第一率通弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率次置第一數以三率乘之一率除之得第四率四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率九乘之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第八率二十五乘之四除之又六除之七除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十率四十九乘之四除之又八除之九除之爲第五數以諸數相并卽通弧

第七術

矢求通弧

術曰以矢八乘之爲第一數次以半徑爲連比例第一率八乘矢爲第三率三率自乘一率除之得第五率四除之又三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四乘之四除之又五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率九乘之四除之又七除之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十一率十六乘之四除之又九除之十除之爲第五數以諸數相并又爲連比例第三率以與第一率半徑相乘開平方得第二率即通弧

第八術

正弦求弧背

術曰以正弦爲第一數次以半徑爲連比例第一率正弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率次置第一數以三率乘之一率除之得第四率二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率九乘之四除之五除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第八率二十五乘之六除之七除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十率四十九乘之八除之九除之爲第五數以諸數相并即弧背

第九術

正矢求弧背

術曰以正矢倍之爲第一數次以半徑爲連比例第一率倍正矢爲第三率三率自乘一率除之得第五率三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率四乘之五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率九乘之七除之八除之爲第四數次置第四數以三率乘之一率除之得第十一率十六乘之九除之十除之爲第五數以諸數相并又爲連比例第三率以與一率半徑相乘開平方得第二率卽弧背[illegible]皆杜

弧線表

設圜半徑爲一千兆

一度	一七四五三二九二五一九九四三
二度	三四九〇六五八五〇三九八八六
三度	五二三五九八七七五五九八二九
四度	六九八一三一七〇〇七九七七三
五度	八七二六六四六二五九九七一六
六度	一〇四七一九七五五一一九六五九
七度	一二二一七三〇四七六三九六〇三
八度	一三九六二六三四〇一五九五四六
九度	一五七〇七九六三二六七九四八九

一〇度	一七四五三二九二五一九九四三二
九〇度	一五七〇七九六三二六七九四八九六
一分	二九〇八八八二〇八六六五
二分	五八一七七六四一七三三一
三分	八七二六六四六二五九九七
四分	一一六三五五二八三四六六二
五分	一四五四四四一〇四三三二八
六分	一七四五三二九二五一九九四
七分	二〇三六二一七四六〇六六〇
八分	二三二七一〇五六六九三二五
九分	二六一七九九三八七七九九一

一〇分	二九〇八八二〇八六六五七
一秒	四八四八一三六八一一
二秒	九六九六二七三六二二
三秒	一四五四四一〇四三三
四秒	一九三九二五四七二四四
五秒	二四二四〇六八四〇五五
六秒	二九〇八八二〇八六六
七秒	三三九三六九五七六七七
八秒	三八七八五〇九四四八八
九秒	四三六三三二三一二九九
一〇秒	四八四八一三六八一一〇

半周　三一四一五九二六五三五八九七九三
全周　六二八三一八五三〇七一七九五八六
按今八線表半徑一千萬則小餘有七位凡數皆至單位止然必更加小餘數位則得數方密除得數首位未至單位以下者依遞加諸率以次求之如所用二率過大則乘除之數愈紊愈繁別立簡法以御之
通弧求弦通弧過半徑以上者三歸之如法求得通弦三乘之寄左復以通弦爲連比例二率二率自乘再乘一率半徑自乘除之得四率與左相減即原所求通弦通弧求矢通弧過半徑以上者二歸之如法求得矢四乘之寄左復以矢爲三率三率自乘一率

半徑除之得五率倍之與左相減卽原所求矢如過全徑以上者三歸之如法求得矢九乘之寄左復以矢倍之爲三率三率自乘一率半徑除之得五率三乘之與左相減復以三率乘五率一率半徑除之得七率折半與左相加卽原所求矢弧背求正弦正矢弧背過四十五度者則以減象限如法求得正矢以減半徑爲正弦如法求得正弦以減半徑爲正矢通弦求弧視通弦過半徑以上而在半徑十之十七以下者求得矢倍之半徑乘之開方得通弦如通弦術求得通弧倍之爲所求通弧如在十之十七以上者通弦自乘以減全徑自乘開方得通弦如通弦術求

得通弧以減半周爲所求通弧矢求通弧八乘矢過半徑以上者半徑乘倍矢開方得通弦如通弦術求得通弧倍之爲所求通弧正弦求弧背正弦自乘數在半徑自乘數半以上者求得餘弦如正弦法求弧背以減象限得原所求弧背正矢求弧背倍矢過半徑以上者求得餘矢如正矢法求弧背以減象限得原所求弧背仁和范景福有借弧求正餘弦法以半徑一千萬爲一率借四十五度正弦卽餘弦七〇七一〇六八爲二率四十五度弧與本弧相減餘爲較弧如法求其弦矢弦與矢相加減本弧小於借弧求正弦則加求餘弦則減大於借弧求正弦則減求餘

弦則加爲三率得四率以與借弧之弦相加減本弧小於借弧求正弦則減求餘弦則加大於借弧求正弦則加求餘弦則減卽得本弧正餘弦有借弦求弧法正弦過半徑十分之三至十分之六借三十度正弦五〇〇〇〇〇〇餘弦八六六〇二五四用之過半徑十分之六至十分之八借四十五度正餘弦用之過半徑十分之八至十分之九借六十度正弦八六六〇二五四餘弦五〇〇〇〇〇〇用之先以本弧正弦求得本弧餘弦次以本弧正餘弦與借弧正餘弦各相減得正弦較爲股餘弦較爲句各自乘相并開方得弦爲較弧通弦如法求得通弧卽較弧與

借弧相加減本弧正弦大於借弧正弦則加小則減

得本弧蓋即二簡法中相加相減之術也

附以弦求弦以矢求矢術

有通弦求通弧加倍幾分之通弦凡弦之倍分皆取奇數

術曰置弧分自乘減一爲第一乘數復置自乘數減九爲第二乘數復置自乘數減二十五爲第三乘數依次列之通置弧分乘通弦本數爲第一數寄左次以半徑爲連比例第一率通弦本數爲第二率二率自乘一率除之得第三率以第一數乘之一率除之得第四率第一乘數乘之四除之又二除之三除之爲第二數寄右次置第二數以三率乘之一率除之得第六率第二乘

數乘之四除之又四除之五除之爲第三數寄左次置第三數以三率乘之一率除之得第八率第三乘數乘之四除之又六除之七除之爲第四數寄右第一數與第三數相并第二數與第四數相并左右相減卽所求通弦單位以下棄之未至單位者依次求之雖未至單位如減數適足弧分自乘數而無乘數者卽以前所得數并減之不復遞求如三倍弧則無第三數五倍弧則無第五數

有矢求通弧加倍幾分之矢凡矢之倍分奇耦通用

術曰置弧分自乘四倍之減四爲第一乘數復置四倍自乘數減十六爲第二乘數復置四倍自乘數減三十六爲第三乘數依次列之迺置弧分自乘數乘矢本數

為第一數寄左次以半徑為連比例第一率矢本數二之
乘之為第三率以第一數乘之一率除之得第五率第
一乘數乘之四除之又三除之四除之為第二數寄右
次置第二數以三率乘之一率除之得第七率第二乘
數乘之四除之又五除之六除之為第三數寄左次置
第三數以三率乘之一率除之得第九率第三乘數乘
之四除之又七除之八除之為第四數寄右第一數與
第三數相并第二數與第四數相并左右相減即所求
矢單位以下棄之未至單位者依次求之雖未至單位
如減數適足四倍弧分自乘數而無乘數者即以前所
得數并減之不復遞求如二倍弧則無第三數三倍弧則無第四數

有通弦求幾分通弧之一通弦此亦取奇數

術曰置弧分自乘減一爲第一乘數復置自乘數九乘之減一爲第二乘數復置自乘數二十五乘之減一爲第三乘數依次列之迺置通弦本數以弧分除之爲第一數次以半徑爲連比例第一率弧分除通弦爲第二率二率自乘一率除之得第三率二率乘之一率除之得第四率第一乘數乘之四除之又二除之三除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第六率第二乘數乘之四除之又四除之五除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第八率第三乘數乘之四除之又六除之七除之爲第四數以諸數相并

即所求通弦單位以下棄之未至單位者依次求之

有矢求幾分通弧之一矢此亦奇耦通用

術曰置弧分自乘四倍之減四爲第一乘數復置四倍自乘數四乘之減四爲第二乘數復置四倍自乘數九乘之減四爲第三乘數依次列之迺置弧分自乘數除矢本數爲第一數次以半徑爲連比例第一率弧分自乘數除矢本數又二乘之爲第三率以第一數乘之一率除之得第五率第一乘數乘之四除之又三除之四除之爲第二數次置第二數以三率乘之一率除之得第七率第二乘數乘之四除之又五除之六除之爲第三數次置第三數以三率乘之一率除之得第九率第

三乘數乘之四除之又七除之八除之爲第四數以諸數相并即所求矢單位以下棄之未至單位者依次求之

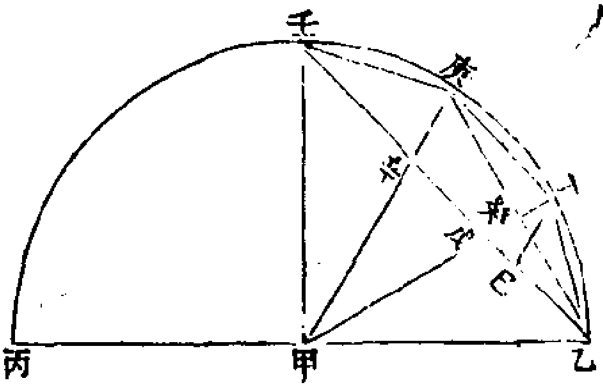
右四術爲立法之原杜氏九術由此推衍而歸於簡易蓋弧與弦矢相求皆弧與一分之弦合故即以弧數爲弧之分數則一分之數極微減差亦極微可以不計而其所用之三率已藏一自乘數故不更求乘數今所立弦矢相求術則弧不與弦合析分愈少則弧弦差愈多必當如減差以求乘數而三率內不復更藏自乘數方爲密合又以正弦求正弦則如通弦術而每數內各省一四除正矢求正矢則矢數弧分並同故不復

省四除法雖小異而理實相同也遞求之次愈多則得數愈密故單位下仍宜加小餘數位蓋畸零紊積尾數易差耳舊法求弦矢以立八線表取數紆迴五分之弦則用中比例後更增求三分之一通弦術用益實歸除汪氏萊更補求五分之一通弦術商除進退皆難遽定今立此術任求幾分之弦矢法皆一貫惟通弦在半徑以上矢及正弦在半徑二之一以上者當求得半弧之弦矢求之數大者又半之故以六十度之弦矢順次遞求一象限內之弦矢悉得其乘除之數並有定程無煩詳審句股割圜之術蓋愈精而愈簡矣

割圜連比例術圖解卷中

陽湖董祐誠

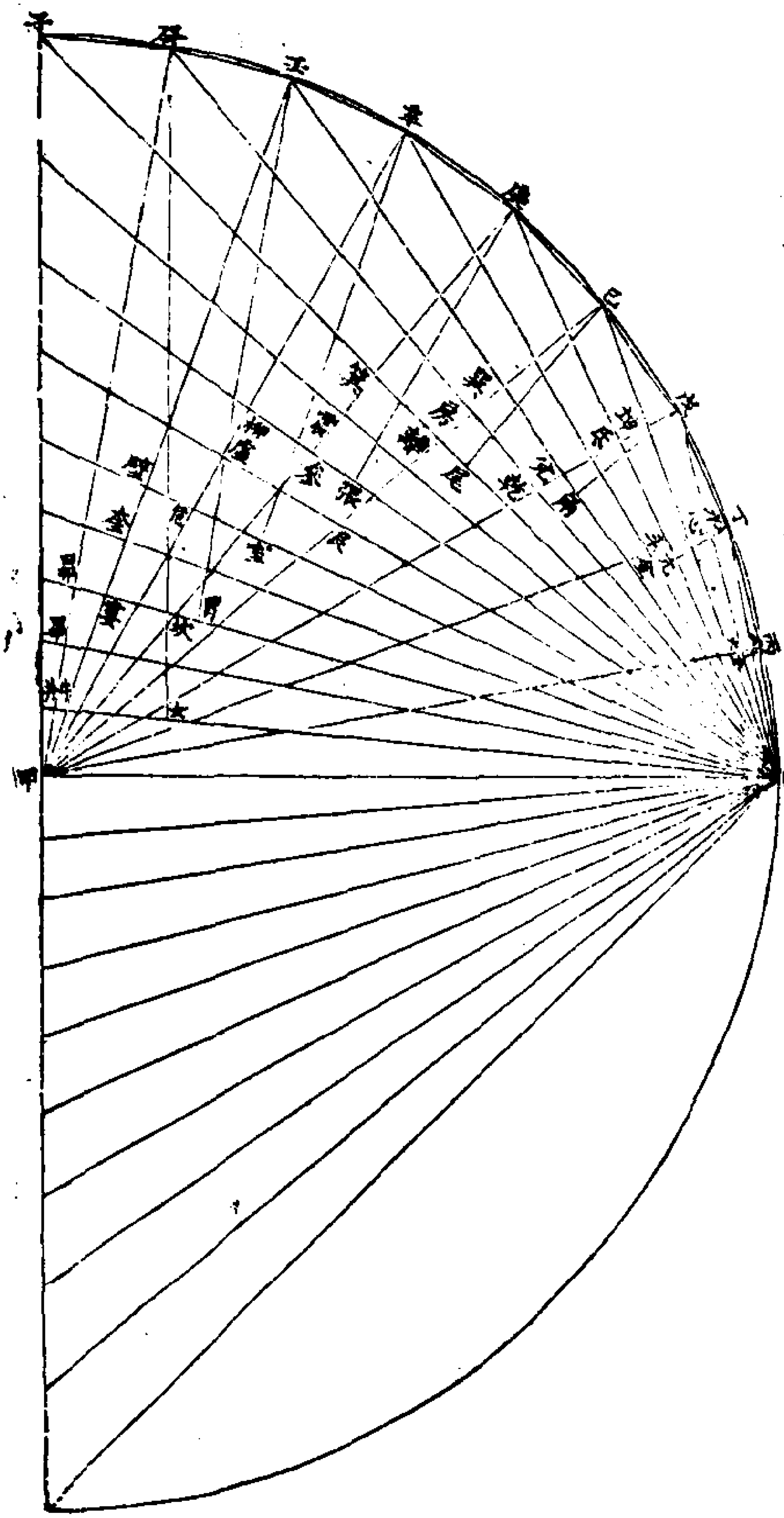
三分弧弦起算圖

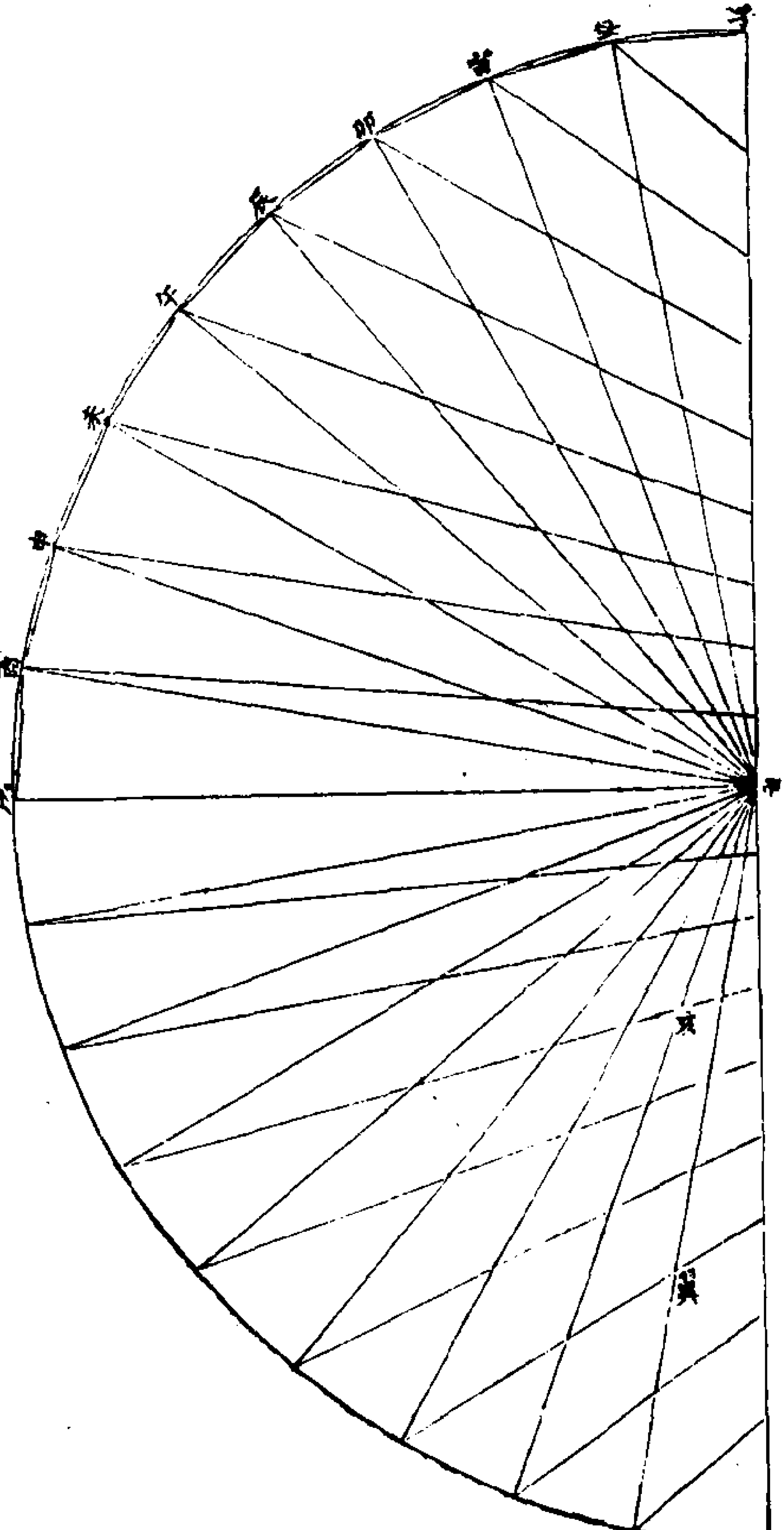


如圖甲乙爲半徑甲丁甲庚甲壬並同乙丁弧爲一分丁庚庚壬弧並同乙庚弧爲二分乙壬弧爲三分乙丁爲一分通弦丁庚庚壬同乙壬爲三分通弦丁癸爲二分矢丁戊爲二分倍矢丁甲乙角對乙丁弧爲兩等邊形等邊必等角甲丁與甲乙等則乙丁甲角與丁乙甲角等丁乙戊角爲界角與丁甲乙角等凡界角皆得心角之倍度丁乙戊三角形與丁甲乙三角形同用丁角而丁乙戊角又同丁甲乙角則丁戊乙角亦必同丁乙甲角又從丁與庚甲徑線平行作丁己線則己丁戊角必同丁甲庚角亦卽同乙甲丁角及丁乙戊角而戊丁己三角形與丁乙戊三角形同用丁戊乙角則丁己戊角亦必與乙丁戊角等此三三角形皆同式故甲乙與乙丁之比

同於乙丁與丁戊之比而乙丁與丁戊之比又同於丁戊與戊己之比則甲乙半徑爲連比例一率乙丁爲二率丁戊爲三率即爲二分之倍矢戊己爲四率并乙戊與乙丁等己辛與丁庚等辛壬與庚壬等爲一分通弦之三倍即三二率而乙壬三分之通弦即爲三倍二率少一己戊四率此即割圜法求圜容十八邊形之理自三分以下比例皆出乎此

弦矢遞加成連比例圖





如圖舉十七分以上爲例甲乙爲半徑乙丙弧爲一分
其弦丙乙乙丁弧爲二分其矢丙土其倍矢丙火乙戊
弧爲三分其弦戊乙乙己弧爲四分其矢丁心其倍矢
丁金乙庚弧爲五分其弦庚乙乙辛弧爲六分其矢戊
氐其倍矢戊乾乙壬弧爲七分其弦壬乙乙癸弧爲八
分其矢己房其倍矢己艮乙子弧爲九分其弦子乙乙
丑弧爲十分其矢庚震其倍矢庚坎乙寅弧爲十一分
其弦寅乙乙卯弧爲十二分其矢辛虛其倍矢辛甲乙
辰弧爲十三分其弦辰乙乙午弧爲十四分其矢壬奎
其倍矢壬亥乙未弧爲十五分其弦未乙乙申弧爲十
六分其矢癸畢其倍矢癸巽乙酉弧爲十七分其弦酉

乙如以甲乙半徑爲連比例第一率則丙乙爲二率爲一分之弦丙乙二率自乘甲乙一率除之得丙火三率爲二分之倍矢解同前圖半之得丙土三率二之一爲二分之矢丙乙火角爲兩等邊形乙土爲其中垂線故丙土得丙火之半丙乙二率乘丙火三率甲乙一率除之得火木四率解同前圖以減水木二率水木同丁丙即同丙乙得水火二率一少四率一以加倍乙火二率乙火同丙乙亦同戊水倍乙火即同乙火并戊水得戊乙二率三少四率一爲三分之弦減戊水二率得水乙二率二少四率一丙乙二率乘之甲乙一率除之水乙斗三角形與乙甲丙三角形同式得水斗三率二少五率一凡二率自乘一率除之爲三率二率三率相乘一率除之爲四率二率四率相乘一率除之爲五率位遞降而數不變下可遞推半之得水心三率一少

五率二之一水乙斗三角爲兩等邊三角形乙心爲其中垂線故水心得水斗之半與上丙乙火三角形及下坤乙兌巽乙離箕乙參柳乙危壁乙婁昴乙牛諸三角形並同加丁水三率一丁水丙火同得丁心三率二少五率二之一爲四分之矢若置丁水三率一倍之得三率二金斗同丁水倍丁水加郎如丁水并金斗水斗三率二少五率一得丁金三率四少五率一爲四分之倍矢減金斗三率一得丁斗三率三少五率一丙乙二率乘之甲乙一率除之丁亢與戊坤平行則斗丁亢角同戊甲丁角亦郎同丙甲乙角爲同式三角形與上火丙木三角形及下兌戊角離己尾參庚張危辛室婁壬胃牛癸女諸三角形並同得斗亢四率三少六率一以減坤亢二率坤亢同戊丁郎同丙乙與上水木線及下巽角箕尾柳張壁室昴胃井女諸線並同得坤斗二率一少四率三多六率一凡相減無對則多少互變加倍乙斗二率四少四率三

乙斗同乙水亦同庚坤倍
乙斗卽如乙斗并庚坤得庚乙二率五少四率五多六率一爲五分之弦減庚坤二率二少四率一得乙坤二率三少四率四多六率一丙乙二率乘之甲乙一率除之得坤兌三率三少五率四多七率一半之得坤氐三率一又二之一少五率二多七率二之一加戊坤三率三少五率一戊坤同
丁斗得戊氐三率四又二之一少五率三多七率二之一爲六分之矢如置戊坤三率三少五率一倍之得三率六少五率二乾兌同戊坤倍戊坤
卽如戊坤并乾兌加坤兌三率三少五率四多七率一得戊乾三率九少五率六多七率一爲六分之倍矢減乾兌三率三少五率一得戊兌三率六少五率五多七率一丙乙二率乘

之甲乙一率除之得兌角四率六少六率五多八率一以減巽角二率得巽兌二率一少四率六多六率五少八率一加倍乙兌二率六少四率八多六率二乙兌同乙坤郎得壬乙二率七少四率十四多六率同壬巽倍乙兌郎如乙兌并壬巽七少八率一爲七分之弦依次相求得己房三率八少五率十六七率四少九率二之一爲八分之矢己艮三率十六少五率二十多七率八少九率一爲八分之倍矢子乙二率九少四率三十多六率二十七少八率九多十率一爲九分之弦庚震三率十二又二之一少五率二十五多七率十七又二之一少九率五多十一率二之一爲十分之矢庚坎三率二十五少五率五十多

七率三十五少九率十多十一率一爲十分之倍矢寅乙二率十一少四率五十五多六率七十七少八率四十四多十率十一少十二率一爲十一分之弦辛虛三率十八少五率五十二又二之一多七率五十六少九率二十七多十一率六少十三率二之一爲十二分之矢辛甲三率三十六少五率一百有五多七率一百十二少九率五十四多十一率十二少十三率一爲十二分之倍矢辰乙二率十三少四率九十一多六率一百八十二少八率二百五十六多十率六十五少十二率十三多十四率一爲十三分之弦壬奎三率二十四又二之一少五率九十八多七率一百四十七少九率一

百有五多十一率三十八又二之一少十三率七多十
五率二之一爲十四分之矢壬亥三率四十九少五率
一百九十六多七率二百九十四少九率二百一十多
十一率七十七少十三率十四多十五率一爲十四分
之倍矢未乙二率十五少四率一百四十多六率三百
七十八少八率四百五十多十率二百七十五少十二
率九十多十四率十五少十六率一爲十五分之弦癸
畢三率三十二少五率一百六十八多七率三百三十
六少九率三百三十多十一率一百七十六少十三率
五十二多十五率八少十七率二之一爲十六分之矢
癸翼三率六十四少五率三百三十六多七率六百七

十二少九率六百六十多十一率三百五十二少十三率一百有四多十五率十六少十七率一爲十六分之倍矢酉乙二率十七少四率二百有四多六率七百十四少八率一千一百二十二多十率九百三十五少十二率四百四十二多十四率一百十九少十六率十七多十八率一爲十七分之弦如是至億萬分則弦與弧合而求弧如求弦亦用弧如用弦一弧之數卽衆弦之合數矣在弧則弦常得奇數一分三分五分至億萬分矢常得耦數二分四分六分至億萬分在連比例諸率則弦常得耦數二率四率六率至億萬率矢常得奇數三率五率七率至億萬率故弧弦相求皆用耦率弧矢相求皆用奇率也弦之二率常與弧分等一分則弦爲二一率一

三分則弦爲二率三故弧求弦以弧爲二率弦求弧以弦爲二率弧求矢以弧爲二率而求三率爲矢矢求弧以三率求二率而爲弧也首率常爲多以下皆多少相間弦則二率幾少四率幾多六率幾少八率幾多矢則三率幾少五率幾多七率幾少九率幾以下多少號常相間故弧求弦矢所得數奇數常加第一第三第五諸數相并恆加耦數常減第二第四第六諸數相并恆減亦以次相間至弦矢求弧則弦矢必少於弧故四率五率在彼爲減者在此爲加諸率相乘一率除之率皆遞降多少號之數既常相間則首位恆多而次位恆少當求次位以相加然乘除降位後則以次位爲首位固變爲多而次位復爲少如是遞降少數恆大多數恆小故有加而無減也在弦則爲幾二率少幾四率又少幾六率又少幾八率以

次遞降在矢則爲幾三率少幾五率又少幾七率又少幾九率亦以次遞降數見下遞加諸率在弧求弦矢則以弧分加一得最末率三分加一爲四則弦末位爲四率圜分加一爲五則矢末位爲五率在弦矢求弧則三分以下已無盡數然析圜至億萬分設數雖大而數十率以後已不成分秒故自單位以下直棄其餘不復入算既得諸率以堆垜術御之則序次秩然而弦則有二率本數即可求二率以下諸率之兼數有二率與諸率之兼數亦可求二率本數矢則有二率以求三率即可求三率以下諸率之兼數有三率以下諸率之兼數亦可求三率以得二率本數二率既常與弧分等則有弧可求弦矢有弦矢亦可求弧故弦則自一分至億萬分矢則自二分至億萬

分數雖不同皆起於二率之一遞加遞積以成諸率則以推堆垜術馭之無不同者割圜連比例之法所由立也

弦矢連比例諸率成遞加數圖

一率 二率加	一 半徑一率 水火二率	一 半徑一率 坤斗二率	一 半徑一率 巽兌二率	一 半徑一率 箕離二率	一 半徑一率 柳參二率	一 半徑一率 壁危二率	一 半徑一率 昴婁二率	一 半徑一率 井牛二率
二率倍 三率加	一 火乙二率 丙火三率	二 斗乙二率 水斗三率	三 兌乙二率 坤兌三率	四 離乙二率 巽離三率	五 參乙二率 箕參三率	六 危乙二率 柳危三率	七 婁乙二率 壁婁三率	八 牛乙二率 昴牛三率
三率倍 四率加		一 丁水三率 水火四率	三 戊坤三率 坤斗四率	六 己巽三率 巽兌四率	一〇 庚箕三率 箕離四率	一五 辛柳三率 柳參四率	二一 壬壁三率 壁危四率	二八 癸昴三率 昴婁四率
四率倍 五率加			一 斗乙四率 水斗五率	四 兌乙四率 坤兌五率	一〇 離乙四率 巽離五率	二〇 參乙四率 箕參五率	三五 危乙四率 柳危五率	五六 婁乙四率 壁婁五率
五率倍 六率加				一 戊坤五率 坤斗六率	五 己巽五率 巽兌六率	一五 庚箕五率 箕離六率	三五 辛柳五率 柳參六率	七〇 壬壁五率 壁危六率
六率倍 七率加					一 兌乙六率 坤兌七率	六 離乙六率 巽離七率	二一 參乙六率 箕參七率	五六 危乙六率 柳危七率

遞加根遞加數遞加數相并遞加數二次相并遞加數三次相并遞加數四次相并

一

半徑 弦中一分

弦右端同左端 倍矢中一分

倍矢上端同下端 弦中一分

弦右端同左端 倍矢中一分

倍矢上端同下端 弦中一分

弦右端同左端 倍矢中一分

如圖舉六率以上爲例第一列皆爲一遞加數之根數也一二三四五遞加數皆遞加一第二列一二三四諸數遞加數也第三列一三六十諸數遞加數相并之數也一仍爲一一又加二爲三三又加三爲六六又加四爲十第四列一四十二十諸數遞加數二次相并之數也一仍爲一一又加三爲四四又加六爲十十又加十爲二十第五列一五十五三十五諸數遞加數三次相并之數也一仍爲一一又加四爲五五又加十爲十五十五又加二十爲三十五第六列一六二十一五十六諸數遞加數四次相并之數也一仍爲一一又加五爲六六又加十五爲二十一二十一又加三十五爲五十六以此遞加至數十百次相并皆超

於一而以次漸增如前圖弧分起一乙丙則二一率亦起一丙乙自二率一遞求諸線弧分增一分則連比例增一率一分之弦有二率二分之矢有三率三分之弦有四率四分之矢有五率率數亦以一遞加遞積凡弦皆以中一分加左右兩端得弦矢皆以中一分加上下兩端得倍矢三分則倍火乙即如右端火乙加左端戊水再加中一分火水得戊乙爲三分之弦四分則倍丁水即如上端丁水加下端斗金再加中一分水斗得丁金爲四分之倍矢而倍矢之中一分出於弦右端丙火出於火乙水斗出於斗乙弦之中一分出於矢上端水火出於丙火坤斗出於丁斗故數常蟬聯半徑一率常爲一弦中一分之二率亦常爲一如遞加根數水火坤斗巽兌箕離二率皆爲一左右一端之二率爲一二三四如遞加數火乙二率一斗乙二率二兌乙二率三離乙二率四倍矢中一分之三率同丙火

三率一水斗三率二坤兌三率三巽離三率四倍矢上下一端之三率爲一三六十如遞加相并數丁水三率一戊坤三率三己巽三率六庚巽三率十弦左右一端之四率同火木四率一斗九四率三兌角四率六離尾四率十率數遞降而遞加相并數亦遞增而二率起一分三率起二分四率起三分五率起四分皆遞差一位弦矢中一分與兩端之一既並如遞加相并數則即以遞加相并數按層斜列之倍下一列數加上一列數即可按次而得弦矢諸率夫遞加相并諸數即三角堆諸數也故又以三角堆之術變之

弦矢連比例諸率成三角堆圖

一率	二率	三率	四率	五率	六率	七率	八率

一角堆根 遞加差	一一一一一一一一一一一一一一一
三角堆根卽平 三角堆每層數	一一一一一 四三二一〇九八七六五四三二一〇 廿廿廿廿十十十十十九七五三一 七五三一九七五三一 分分分分分分分分分分分分分分
平三角堆積卽立 三角堆每層數	一 〇九七六五四三二二一一 五八八六五五六八一五〇六三一〇 廿廿廿廿二十十十十十八六四二 八六四二十八六四二 分分分分分分分分分分分分分分
立三角堆積卽三乘 三角堆每層數	五四三二二一一 六五六八三六二八五三二一 〇五四六〇五〇四六五〇〇四八〇 廿廿廿廿廿十十十十十九七五三 九七五三一九七五三一 分分分分分分分分分分分分分分
三乘三角堆積卽四乘 三角堆每層數	三一一一 三八三〇七四三二二 八一六〇二九三三七三一 〇〇五八五五〇〇六〇五五五八〇 三廿廿廿廿二十十十十十十八六四 十八六四二十八六四二 分分分分分分分分分分分分分分
四乘三角堆積卽五乘 三角堆每層數	八六四三二一 五一三〇〇二七四三二一 六八六〇〇八九六五二五三 八八八六六七六六六六六一六一〇 卅廿廿廿廿廿十十十十十九七五 一九七五三一九七五三一 分分分分分分分分分分分分分分
五乘三角堆積卽六乘 三角堆每層數	三一一 七八三八五三一 一五三〇〇〇七九四三 三四七〇〇〇七二四二〇〇六七一〇 三〇五八五三六四三〇八六八六 卅卅廿廿廿廿廿十十十十十八六 二〇八六四二十八六四二 分分分分分分分分分分分分分分
六乘三角堆積卽七乘 三角堆每層數	七五三一一 七三三九一六三一 三八四四四四七七三一 〇八四八〇五三六九〇〇六八一〇 卅卅廿廿廿廿廿十十十十十九七 三一九七五三一九七五三一 分分分分分分分分分分分分分分

如圖舉八率以上爲例分爲八列第一列常爲一三角堆根數之差也（一加一爲二又加一爲三又加一爲四）第二列爲一二三

四五六上圖遞加之數即三角堆每層遞加之根數三角堆一層則根為一二層則根為二諸形悉同亦即平三角堆每層之數也平三角堆第一層為一第二層為二第三層為三第三列為一三六十十五二十一上圖遞加一次相并之數即平三角堆之積平三角堆根一者為積一根二者并一層一二層二為積三根三者并一層一二層二三層三為積六亦即立三角堆每層之數也立三角堆第一層為一第二層為三第三層為六第四列為一四十二十三十五上圖遞加二次相并之數即立三角堆之積立三角堆根一者為積一根二者并一層一二層三為積四根三者并一層一二層三三層六為積十亦即三乘三角堆每層之數也三乘三角堆第一層為一第二層為四第三層為十第五列為一五十五三十五七十上圖遞加三次相并之數即三乘三角堆之積三乘三角堆根一者為積一根二者

并一層一二層四爲積五根三者并一層一二層四三層十爲積十五亦即四乘三角堆
每層之數也四乘三角堆第一層爲一第二層爲五第三層爲十五以此遞推至
數十百乘三角堆積皆以次漸增而其根常相等如根爲二
則平三角堆積三立三角堆積四三乘三角堆積五四乘三角堆積六五乘三角堆積七六乘三角堆積八根
爲三則平三角堆積六立三角堆積十三乘三角堆積十五四乘三角堆積二十一五乘三角堆積二十八六
乘三角堆積三十六如前圖以倍遞加數加一數爲弦之二率在
此則爲倍第二列平三角堆每層數加第一列三角堆
根遞加差數而三角堆根遞加差數即平三角堆每層
數之差是依次兩平三角堆每層數相加即得二率前一
空位無加仍得一爲一分弧之二率一二相加得三爲三分弧之二率二三相加得五爲五分弧之二率上
圖以倍遞加一次相并數加遞加數爲矢之三率在此

則爲倍第三列平三角堆積加第二列平三角堆每層數而平三角堆每層數即平三角堆積之差是依次兩平三角堆積相加即得三率一前空位無加仍得一爲二分弧之三率一三相加得四爲四分弧之三率三六相加得九爲六分弧之三率以此遞推則依次兩立三角堆積相加即得四率一前空位無加仍得一爲三分弧之四率一四相加得五爲五分弧之四率四十相加得十四爲七分弧之四率依次兩三乘三角堆積相加即得五率一前空位無加仍得一爲四分弧之五率一五相加得六爲六分弧之五率五十五相加得二十爲八分弧之五率依次兩四乘三角堆積相加即得六率一前空位無加仍得一爲五分弧之六率一六相加得七爲七分弧之六率六二十一相加得二十七爲九分弧之六率依次兩五乘三角堆積相加即得七率一前空位無加仍得一爲六分弧之七率一七相加得八爲八分弧之七率七二十八相加得三十五爲十分弧之七率依次兩

六乘三角堆積相加即得八率一前空位無加仍得一爲七分弧之八率一八相加得九爲九分弧之八率八三十六相加得四十四爲十一分弧之八率凡率數進一則三角堆乘方數亦進一而求弦矢各率者皆可以三角堆求積術御之矣

凡求三角堆積者以根數根數即層數與根數加一相乘爲帶縱平方積二除之得平三角堆積以根數與根數加一相乘加二再乘爲帶縱立方積二除之三除之得立三角堆積以根數與根數加一相乘加二再乘加三三乘爲帶縱三乘方積二除之三除之四除之得三乘三角堆積以根數與根數加一相乘加二再乘加三三乘加四四乘爲帶縱四乘方積二除之三除之四除之五

除之得四乘三角堆積乘方數進一位則乘數皆增一除數亦增一此堆垛術之定法也舊法至求立三角堆而止三乘方以下見汪萊衡齋算學據此術以求弦矢諸率當置弧分折半三率一起於二分如平三角堆根數之爲一者則四分根爲二六分根爲三凡三角堆根數皆遞加以一而弧分皆遞加以二矢起於弧之二分而平三角堆根亦起於弧之二分故當折半爲平三角堆之根以根與根加一相乘得數又以根減一與根相乘得數兩數相并兩三角積除數相同故以實相并而并除爲兩帶縱平方積二除之爲兩平三角堆積迺得三率置弧分減一折半四率一起於三分如立三角堆根數之爲一者則五分根爲二七分根爲三凡三三角堆根數皆遞加以一而弧分皆遞加以二弦起於弧之一分而立三三角堆根則起於弧之三分故當減一折半爲立三角堆之根以根與根加一相乘與根加二再乘得數又以根減一與根

相乘與根加一再乘得數兩數相并為兩帶縱立方積二除之三除之為兩立三角堆積迺得四率置弧分減二折半（五率一起於四分如三乘三角堆根數之為一者則六分根為二八分根為三矢起於弧之二分而三乘三角堆根則起於弧之四分故當減二折半）為三乘三角堆之根以根與根加一相乘與根加二再乘與根加三三乘得數又以根減一與根相乘與根加一再乘與根加二三乘得數兩數相并為兩帶縱三乘方積二除之三除之四除之為兩三乘三角堆積迺得五率置弧分減三折半（六率一起於五分如四乘三角堆根數之為一者則七分根為二九分根為三弦起於弧之一分而四乘三角堆根則起於弧之五分故當減三折半）為四乘三角堆之根以根與根加一相乘與根加二再乘與根加三三乘與根加四四乘得

數又以根減一與根相乘與根加一再乘與根加二三乘與根加三四乘得數兩數相并爲兩帶縱四乘方積二除之三除之四除之五除之爲兩四乘三角堆積適得六率以此遞推皆置弧分以一二三四諸數遞減折半爲根以根與根減一如諸乘方三角堆以根求積遞乘遞除術求得兩三角堆積並得諸率然取數過繁故復以方錐積變之別立爲簡法也

弦矢連比例諸率成方錐堆圖

三率	一二分	四四分
四率	一三分	五五分
五率	一四分	六六分
六率	一五分	七七分
七率	一六分	八八分
八率	一七分	九九分

九 六分	一六 八分	二五 十分	三六 十二分	四九 十四分	六四 十六分	八一 十八分	一〇〇 二十分	一二一 二十二分	一四四 二十四分	一六九 二十六分	一九六 二十八分
一四 七分	三〇 九分	五五 十一分	九一 十三分	一四〇 十五分	二〇四 十七分	二八五 十九分	三八五 二十一分	五〇六 二十三分	六五〇 二十五分	八一九 二十七分	一〇一五 二十九分
二〇 八分	五〇 十分	一〇五 十二分	一九六 十四分	三三六 十六分	五四〇 十八分	八二五 二十分	一二一〇 二十二分	一七一六 二十四分	二三六六 二十六分	三一八五 二十八分	四二〇〇 三十分
二七 九分	七七 十一分	一八二 十三分	三七八 十五分	七一四 十七分	一二五四 十九分	二〇七九 二十一分	三二八九 二十三分	五〇〇五 二十五分	七三七一 二十七分	一〇五五六 二十九分	一四七五六 三十一分
三五 十分	一一二 十二分	二九四 十四分	六七二 十六分	一三八六 十八分	二六四〇 二十分	四七一九 二十二分	八〇〇八 二十四分	一三〇一三 二十六分	二〇三八四 二十八分	三〇九四〇 三十分	四五六九六 三十二分
四四 十一分	一五六 十三分	四五〇 十五分	一一二二 十七分	二五〇八 十九分	五一四八 二十一分	九八六七 二十三分	一七八七五 二十五分	三〇八八八 二十七分	五一二七二 二十九分	八二二一二 三十一分	一二七九〇八 三十三分

如圖舉八率以上為例分為六列第一列一四九十六

平方錐堆積卽立方錐堆每層數
立方錐堆積卽三乘方錐堆每層數
三乘方錐堆積卽四乘方錐堆每層數
四乘方錐堆積卽五乘方錐堆每層數
五乘方錐堆積卽六乘方錐堆每層數
六乘方錐堆積卽七乘方錐堆每層數

上圖兩平三角堆相并之數卽平方錐堆積平方錐堆如鍼置平方形第一層為一第二層為三第三層為五故根一者并一層為積一根二者并一層一二層三為四根三者并一層一二層三三層五為九亦卽立方錐堆每層之數也立方錐堆第一層為一第二層為四第三層為九第二列一五十四三十上圖兩立三角堆相并之數卽立方錐堆積立方錐堆根一者為積一根二者并一層一二層四為五根三者并一層一二層四三層九為十四亦卽三乘方錐堆每層之數也五率以下並同一例至成數十百乘方錐堆積在前圖為兩三角堆形相并之積在此則為方錐堆之積其根數與上所求三角形之根相同其積數卽弦矢諸率之率

數凡求方錐堆積皆以倍根數乘根數爲帶縱平方積二除之得平方錐堆積以根數與根數加一相乘倍根數加一再乘爲帶縱立方積二除之三除之得立方錐堆積以根數與根數加一相乘根數加二再乘倍根數加二三乘爲帶縱三乘方積二除之三除之四除之得三乘方錐堆積以根數與根數加一相乘根數加二再乘根數加三三乘倍根數加三四乘爲帶縱四乘方積二除之三除之四除之五除之得四乘方錐堆積乘除數皆遞進一與三角堆同惟倍根數亦遞加一爲異此亦堆垜術之定法也舊法惟有立方錐堆求積術其術以根數加半相乘故惟用三除此用倍根加一則倍於根數加半故又增一二除諸乘方理數悉同可以類推凡求弦求矢皆

由二率以求諸率而倍根遞加數又恆與弧分等即恆與二率等如三率則以倍根數相乘而根數即由弧分折半而得是弧分即倍根四率本以倍根數加一相乘而根數即由弧分減一折半所得是弧分即倍根加一以此遞推則弧分與倍根遞加數常相等則設有二率以求諸率者弧分二率折半爲根以乘弧分二率即倍根得帶縱平方積二除之得平方錐堆積即爲三率復以弧分減一折半爲根以根與根加一相乘以乘弧分二率即倍根加一爲帶縱立方積二除之三除之得立方錐堆積即爲四率復以弧分減二折半爲根以根與根加二相乘以乘三率爲帶縱立方積三除之四除之得三乘方錐堆積即爲五率凡二率與四率三率與五率根皆遞降以一本當以根與根加一相乘根加二再乘倍根加二三乘爲帶縱三乘方積二除之三除之四除之得三乘方

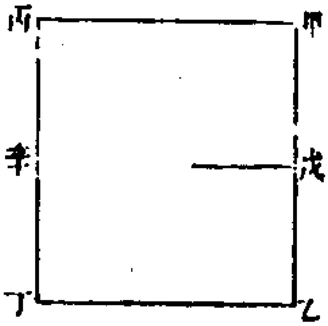
錐堆積而所得之三率本為根乘倍根二除之之數則在三率為根者在五率為根加一在三率為倍根者在五率為倍根加二以三率求五率是已有根加一倍根加二諸乘數又有二為除數故惟以五率之根與根加二相乘又以三率乘之變為帶縱立方積而除數亦少一二除也以弧分減三折半為根以根與根加三相乘以乘四率為帶縱立方積四除之五除之得四乘方錐堆積即為六率本當以根與根加一相乘根加二再乘根加三三乘倍根加三四乘為帶縱四乘方積二除之三除之四除之五除之得四乘方錐堆積而所得之四率本為根與根加一相乘倍根加一再乘二除之三除之之數則在四率為根者在六率為根加一在四率為根加一者在六率為根加二在四率為倍根加一者在六率為倍根加三以四率求六率是已有根加一根加二倍根加三諸乘數又有二除三除數故惟以六率之根與根加三相乘又以四率乘之變為帶縱立方積而除數亦少一二除又少一三除七率以下皆算理同可以類推以弧分減四折半為根以根與根加四相乘以乘五率為帶縱立方積五

除之六除之得五乘方錐堆積卽爲七率以弧分減五折半爲根以根與根加五相乘以乘六率爲帶縱立方積六除之七除之得六乘方錐堆積卽爲八率以弧分減六折半爲根以根與根加六相乘以乘七率爲帶縱立方積七除之八除之得七乘方錐堆積卽爲九率以弧分減七折半爲根以根與根加七相乘以乘八率爲帶縱立方積八除之九除之得八乘方錐堆積卽爲十率以此遞推而億萬率法皆一貫諸率之根旣以弧分減一二三四諸數折半爲根其所減之數又常與乘數內根所加之數等四率減一而乘數亦爲根加一五率減二而乘數亦爲根加二以下並同則四率以下弧分常爲帶縱立方積面羃之長廣和四率

本以弧分減一折半爲根其立方面冪爲根乘根加一之冪則根爲廣根加一爲長其長廣和爲倍根加一與弧分等五乘本以弧分減二折半爲根其立方面冪爲根乘根加二之冪則根爲廣根加二爲長其長廣和爲倍根加二亦與弧分等以下並同　凡以長廣和爲正方減去較方冪恆爲原方冪之四倍又兩立方體同高者其面冪之比例卽如體積之比例此又通弧求弦矢各加一四除之理所從出也

凡求三乘所得之帶縱平方積以根數爲廣倍根數爲長如以諸乘相遞之理例之則亦可以一乘爲高長立方積蓋一乘常爲一故立積亦如平積也與弧分自乘平方積如一與二故置弧分自乘爲平方積二除之得帶縱平方積又二除之得平方錐堆積卽爲三乘然諸數皆用倍矢此求矢本數當更以二除之方爲

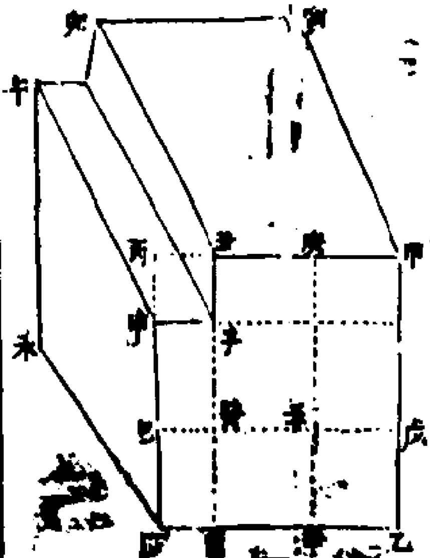
三率故於弧分自乘二除之數易為四除也倍矢與矢本數在三率增一二除則五率以降皆當增一二除然求五率時所用之三率即矢本數已有二除在內故不復易四除為八除七率以下並同



如圖甲乙為弧分甲乙丙丁為弧分自乘正方形甲戊為甲乙之半即根數本以弧分減半為根故甲戊得甲乙之半甲丙為倍根數以甲戊為廣甲丙為長成甲戊丙辛帶縱平方形本以根與倍根相乘為帶縱平方積甲乙既為弧分甲戊既為弧分之半則

必爲弧分自乘甲乙丙丁平方積二之一矣

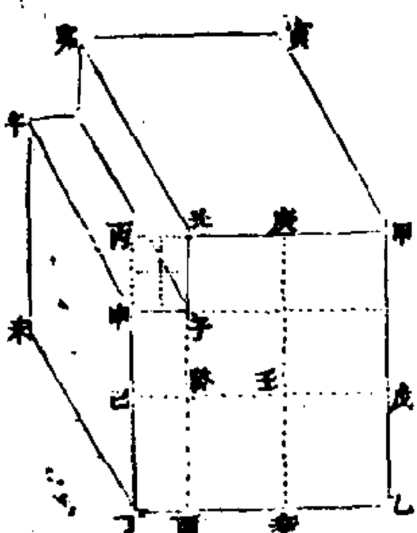
凡求四率所得之帶縱立方積以根數爲廣根數加一爲長二率爲高與弧分自乘減一爲面羃二率爲高之磬折立方積爲一與四故置弧分自乘減一爲磬折面羃以二率乘之爲磬折立方積四除之得帶縱立方積又二除之三除之得立方錐堆積即爲四率



如圖甲丙為弧分甲乙丙丁為弧分自乘正方形丑子丙申小方隅積一其邊丑丙亦為一庚丑為甲丑之半卽根數本以弧分減一折半為根數故甲丙減丑丙折半於庚為庚丑庚壬為根加一以庚丑為廣庚壬為長二率為高成帶縱立方積本以根與根加一相乘倍根加一卽二率再乘為帶縱立方一積其面冪為庚壬丑癸帶縱平方形為甲乙丑子申丁磬折形面冪四之一甲乙丙丁方積內減去丑子丙申隅積一卽成甲乙丑子申丁磬折形移子癸申己形補戊乙壬辛形卽與庚壬丑癸形等而甲戊庚壬形己壬丁辛形皆與庚壬丑癸形相等故為四之一若同以甲寅二率為高成寅甲乙丁未午申子丑卯磬折立方形則兩立積相較亦為四之一矣

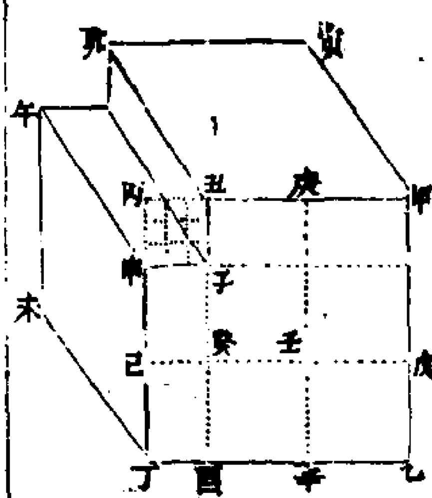
凡求五率所得之帶縱立方積以根數為廣根數加二

爲長三率爲高與弧分自乘減四爲面羃三率爲高之倍
磬折立方積爲一與四故置弧分自乘減四爲磬折面
羃以三率乘之爲磬折立方積四除之爲帶縱立方積
又三除之四除之得三乘方錐堆積卽爲五率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形丑子
丙申小方隅積四其邊丑丙二庚丑爲甲丑之半卽根

數本以弧分減二折半爲根數故甲丙減丑丙折半於庚爲庚丑庚壬爲根加二以庚
丑爲廣庚壬爲長三率爲高成帶縱立方積本以根與根加二相
乘以三率再乘爲帶縱立方積其面羃爲庚壬丑癸帶縱平方形爲甲
乙丑子申丁磬折形面羃四之一移積之理並與前同若同以甲
寅三率爲高則成寅甲乙丁未午申子丑卯磬折立方
形兩立積相較亦爲四之一矣
凡求六率所得之帶縱立方積以根數爲廣根數加三
爲長四率爲高與弧分自乘減九爲面羃四率爲高之
磬折立方積爲一與四故置弧分自乘減九爲磬折面
羃以四率乘之爲磬折立方積四除之得帶縱立方積
又四除之五除之得四乘方錐堆積即爲六率



如圖甲丙為弧分甲乙丙丁為弧分自乘正方形丑子丙申小方隅積九其邊丑丙為三庚丑為甲丙之半即根數本以弧分減三折半為根數故甲丙減丑丙折半於庚為庚丑庚壬為根加三以庚丑為廣庚壬為長四率為高成帶縱立方積本以根與根加三相乘以四率再乘為帶縱立方積其面冪為庚壬丑癸帶縱平方形為甲乙丑子申丁磬折形面冪四之一若同以甲寅四率

爲高則成寅甲乙丁未午申子丑卯磬折立方形兩立積相較亦爲四之一矣

七率以下數遞進而按位乘除則無異可以類推不復圖解則凡有通弧以求弦矢諸率即以通弧作弧分爲二一率其求弦率者弧分自乘減一二率乘之四除之又三除之三除之爲四率弧分自乘減九四率乘之四除之又四除之五除之爲六率弧分自乘減二十五六率乘之四除之又六除之七除之爲八率弧分自乘減四十九八率乘之四除之又八除之九除之爲十率以次遞求其減數皆奇數按位自乘數其求矢率者弧分自乘四除之又二除之爲三率弧分自乘減四三率乘之

四除之又三除之四除之爲五率弧分自乘減十六五率乘之四除之又五除之六除之爲七率弧分自乘減三十六七率乘之四除之又七除之八除之爲九率亦以次遞求其減數皆耦數按位自乘數然所得諸數皆諸率之約分若求眞數當遞以一率除之而其位遞降因一率常爲一故諸率位降而數不改又通弧求弦矢即以通弧數作弧分數則自乘後減數至微即一四九十六諸數可不入算故直以通弧爲二率二率自乘爲三率即如弧分自乘下求諸率並以三率乘之不復遞減也弦矢互求諸術則必以減數立算方爲密合又弧求弦弧分當用奇數然其差亦微故奇耦通用至弦求弦則仍當用奇數也既得諸率按間位多少之數加減之即爲通弦之全數弧背求正弦正

矢則弦矢之比例悉同通弦與弧背既同用一矢而正弦得通弦之半半與半如全與全故比例皆等而弧背自乘積與通弧自乘積常爲四之一邊加一倍則積加四倍以求諸率當加一四乘今不復加而諸率內並省一四除則與四乘無異矣古法名通弧爲弧背通弦爲弦弧背爲半弧背正弦爲半弧弦今並仍杜氏原文無所更易至弦矢求弧則卽弧求弦矢之還原如堆垛術變積求之則成一例也

[illegible]

[illegible]

割圜連比例術圖解卷下

陽湖董祐誠

弦求弧連比例諸率遞降圖

通弦節第一數第二數	第三數	第四數
八率 多一三之	少又九之六除實少又三之一	一又三之一
六率 少一	一	
四率 少一	一	
二率三		

如圖舉三分通弦八率以上為例為通弦求弧諸率之所自出三分通弦為二率三少四率一今求二率三之全數弧分數恆同於二率數析分愈密則二率即弧分矣則以通弦為第一數數

內少一四率應加一四率迺即以通弦二率三少四率一爲二率二率自乘一率除之爲三率九少五率六多七率一即爲三率通弦二率三少四率一爲二率乘之一率除之爲四率二十七少六率二十七多八率九少十率一圖止八率以上首位四率二十七與應加之四率一爲二十七與一即以一乘之二十七除之約爲四率一少六率一多八率三之一少十率二十七之一爲第二數以之相加則前少之四率已加足而次位尚少六率一迺復置第二數以三率九少五率六多七率一爲三率乘之一率除之爲六率九少八率十五多十率十少十二率三又三之一多十四率九之五十四率以下不具列首位之

六率九與應加之六率一爲九與一卽以一乘之九除之約爲六率一少八率一又九之六多十率一又九之一少十二率二十七之十多十四率八十一之五爲第三數復以相加則前少之六率一已加足尚少八率一又九之六除前第二數內所多八率三之一實少八率一又三之一當更加八率一又三之一如是屢求至於無盡是以三分通弦爲二率以求諸率應卽通弦本數加四率一又加六率一又加八率一又三之一十率以下其數無盡今不具列而得二率三之全數與弧分等也五分以下皆依法遞求亦以遞加之差齊之而比例生矣

弦求弧連比例諸率圖

弧分	二率	四率加	六率加	八率加
一	一			
三	三	一	一	一一之
五	五	五	一四	五三
七	七	一四	七七	五六一
九	九	三〇	二七三	三二八九
一一	一一	五五	七四八	一三四六四

如圖舉八率以上爲例爲通弦求弧之相連比例率數

矢求弧連比例諸率遞降圖

倍矢即第一數 第二數

第三數

第四數

九率

多十六之二

少八之三

除上實少十六

十六之五之五

三率四	五率少一	七率
	一	少二之一
		二之一

如圖舉四分之矢九率以上爲例爲矢求通弧諸率之所自出矢首位三率雖同而實數則少當遞求諸率以相加而得三率之全數四分之倍矢爲三率四少五率一即用爲三率如法以求諸率法與前所列三分通弦同惟用數互異不復贅列是以四分之倍矢爲三率以求諸率應即倍矢本數加五率一又加七率二之一又加九率十六之五十一率以下數無盡求而得以半弧分爲二率所求之三率也六分以下亦依次遞求並以遞加之差齊之而比例生矣

矢求弧連比例諸率圖

弧分	二	四	六	八	一〇
三率	一	四	九	一六	二五
五率加		一	六	二〇	五〇
七率加		一二之	七	四二	一六五
九率加		一六之五	一〇	一〇七又四之一	六六〇

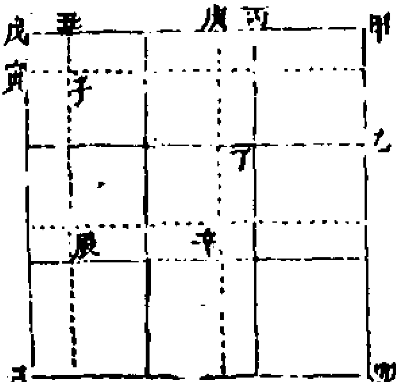
如圖舉九率以上爲例爲矢求通弧之諸率如上既得諸率當求其遞增之差立爲通術圖中弦之二率四率矢之三率五率皆與弧求弦矢數等故術亦同六率以降率數驟增而弦自三分矢自四分以下諸率卽無盡

數仍以弧求弦矢術變之得其差數始可立爲通術也

凡弦求弧如前通弧求弦四率六率相求術以六率四乘之五乘之卽成帶縱立方積以四率爲高弧分減三折半爲廣又加三爲長前解詳圖若以弦求弧之六率四乘之五乘之亦成帶縱立方積亦以四率爲高而廣則如弧分三乘減一折半長則如弧分三乘減一折半又加一

弧求弦之帶縱立方積其高爲四率以除帶縱立方積卽得長廣相乘之冪五分廣爲一長爲四其冪四七分實爲二長爲五其冪十其廣起五分爲一五分以下弧分分皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減三折半爲廣加三爲長弦求弧之帶縱立方積其高亦爲四率而六率既不同則體積變而面冪亦變若亦以四率爲高除帶縱立方積則三分冪爲二十廣如四長如五五分冪爲五十六廣如七長如八七分冪爲一百十廣如十長如十一其廣起三三分爲四三分以下弧分皆遞增二廣數皆遞增三其長皆較廣多一則亦遞增三故

以弧分三乘減一折半則得廣廣恆加一得長則以此長廣相乘爲帶縱平方冪四率乘之爲帶縱立方積四除之五除之可得六率而所有之帶縱立方積爲弧分自乘又九乘減一四率乘之所成磬折立方積四之一故置弧分自乘又九乘之減一爲磬折冪四率乘之得磬折立方積四除之爲帶縱立方積又四除之五除之即得六率



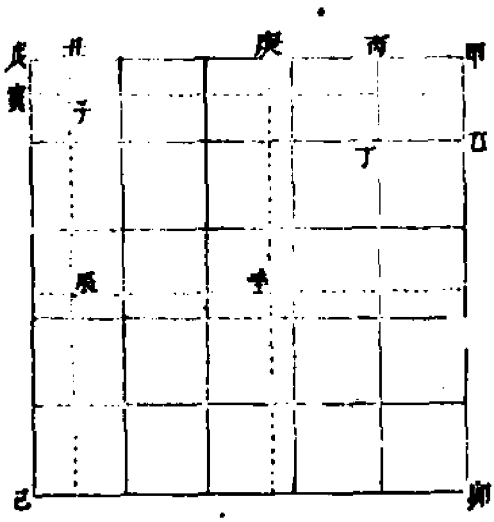
如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲戊爲三倍弧分甲卯戊己爲三倍弧分自乘正方形卽甲乙丙丁方形之九倍丑子戊寅小方隅積一其邊丑戊亦一以甲戊減戊丑折半於庚庚丑爲三倍弧分減一折半之數庚辛爲三倍弧分減一折半又加一之數庚辛同庚戊庚辛丑辰帶縱平方冪爲甲卯丑子寅己磬折冪四之一若同以四率爲高則立積亦爲四之一矣移積之理

同前不復詳釋

如前六率八率相求術以八率六乘之七乘之卽成帶縱立方積以六率爲高弧分減五折半爲廣又加五爲長若以弦求弧之八率六乘之七乘之亦成帶縱立方

積亦以六率爲高而廣則如弧分五乘減一折半長則如弧分五乘減一折半又加一弧求弦之帶縱立方積其高爲弧求弦之六率以除帶縱立方積則得長廣相乘之冪七分廣一長六其冪六九分廣二長七其冪十四其廣起七分爲一長七分以下弧分皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減五折半爲廣加五爲長弦求弧之帶縱立方積以弦求弧之六率爲高以除帶縱立方積則三分冪爲五十六廣如七長如八五分冪爲一百五十六廣如十二長如十三七分冪爲三百有六廣如十七長如十八其廣起三分爲七三分以下弧分皆遞增二廣數皆遞增五其長較廣亦多一則亦遞增五故以弧分五乘減一折半爲廣廣恆加一爲長以此類推則十率以弧分七乘減一折半爲廣加一爲長十二率以弧分九乘減一折半爲廣加一爲長法皆一貫則以此長廣相乘爲帶縱平方冪六率乘之爲帶縱立方積六除之七除之可得八率而所有之帶縱立方積爲弧分自乘又二十五乘減一六率乘之所成磬折立方積四之一

故置弧分自乘又二十五乘之減一爲磬折冪六率乘之爲磬折立方積四除之得帶縱立方積又六除之七除之即得八率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲戊爲五倍弧分甲卯戊己爲五倍弧分自乘正方形即甲

乙丙丁方形之二十五倍丑子戊寅小方隅積一其邊丑戊亦一以甲戊減戊丑折半於庚庚丑爲五倍弧分減一折半之數庚辛爲五倍弧分減一折半又加一之數庚辛同庚戊庚辛丑辰帶縱平方冪爲甲卯丑子寅己磬折冪四之一若同以六率爲高則立積亦爲四之一矣十率以下數遞進而按位乘除則無異則十率以七倍弧分減一折半爲廣加一爲長之面冪與四十九倍弧分自乘方又減一之磬折冪十二率以九倍弧分減一折半爲廣加一爲長之面冪與八十一倍弧分自乘方又減一之磬折冪皆爲四之一至億萬率無不相同故以通弦數作弧分爲二率弧分自乘減一二率乘之四

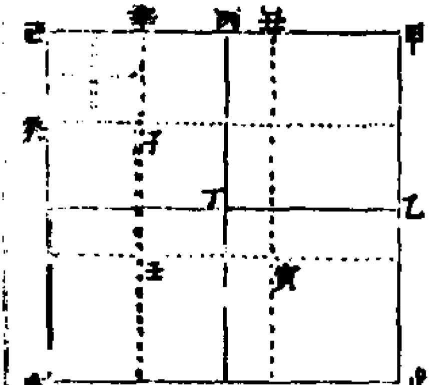
除之又二除之三除之爲四率弧分自乘九乘之減一四率乘之四除之又四除之五除之爲六率弧分自乘二十五乘之減一六率乘之四除之又六除之七除之爲八率以此遞求其乘數皆奇數挨位自乘數其減數皆一而除數則與弧求弦同其一率遞除降位及直以弧分自乘之三率乘之不復減一其理亦同既得諸率以之相加即得二率全數而二率全數即弧分全數故即爲通弧之數正弦求弧背則比例固同而以正弦作弧分其自乘積與通弦作弧分自乘之積亦爲一與四通弦加正弦一倍以求諸率當加一四乘今不復加亦以少一四除代之至圜徑求周圜內六分之一通弦常與半徑

等則以半徑爲通弦如通弦法求得通弧六倍之即圓周故先以三乘全徑即如六乘半徑以求通弧則徑大六倍弧亦大六倍即如六倍通弧之數蓋連比例二率與一率同則諸率皆同今通弦二率既如半徑一率則凡二率自乘一率除及三率乘一率除者皆可不用乘除矣

凡矢求弧如前通弧求矢五率七率相求術以七率五乘之六乘之即成帶縱立方積以五率爲高弧分減四折半爲廣又加四爲長若以矢求弧之七率五乘之六乘之亦成帶縱立方積亦以五率爲高而廣則如弧分二乘減二折半長則如弧分二乘減二折半又加二弧求

矢之帶縱立方積其高爲五率以除帶縱立方積則得長廣相乘之冪六分其廣爲一長爲五其冪五八分廣爲二長爲六其冪十二其廣一起六分爲一六分以下弧分皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減四折半爲廣加四爲長矢求弧之帶縱立方積其高亦爲五率而七率既不同則體積變而面冪亦變若以五率除帶縱立方積則四分冪爲十五廣如三長如五六分冪爲三十五廣如五長如七八分冪爲六十三廣如七長如九其廣起四分爲三四分以下弧分皆遞增二廣數亦遞增二其長皆較廣多二則亦遞增二故以弧分二乘減二折半得廣故加二得長也

廣則以此長廣相乘爲帶縱平方冪五率乘之爲帶縱立方積五除之六除之可得七率而所有之帶縱立方積爲弧分自乘又四乘減四五率乘之所成磬折立方積四之一故置弧分自乘又四乘之減四爲磬折冪五率乘之爲磬折立方積四除之爲帶縱立方積又五除之六除之卽得七率

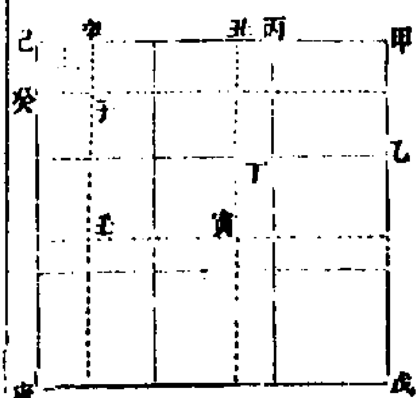


如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲己爲二倍弧分甲戊己庚爲二倍弧分自乘正方形卽甲乙丙丁方形之四倍辛子己癸小方隅積四其邊辛己爲二以甲己減辛己折半於丑丑辛爲二倍弧分減二折半之數丑寅爲二倍弧分減二折半又加二之數丑寅同丑己丑寅辛壬帶縱平方羃爲甲戊辛子癸庚磬折羃

四之一若同以五率爲高則立積亦爲四之一矣

如前七率九率相求術以九率七乘之八乘之卽成帶縱立方積以七率爲高弧分減六折半爲廣又加六爲長若以矢求弦之九率七乘之八乘之亦成帶縱立方積亦以七率爲高而廣則如弧分三乘減二折半長則如弧分三乘減二折半又加二弧求矢之帶縱立方積其高爲弧求矢之七率以除帶縱立方積則得長廣相乘之羃八分廣一長七其羃七十分廣二長八其羃十六其廣起八分爲一八分以下弧分皆遞增二廣長數皆遞增一故以弧分減六折半爲廣加六爲長矢求弧之帶縱平方積其高爲矢求弧之七率以除帶縱立方積則四分羃爲三十五廣如五弧長如七率七六分羃爲八十廣如八長如十八分羃爲一百四十三廣如十長如十三其廣起四分爲五四分以下弧分皆遞增二廣數皆遞增三其長較廣亦多二則亦遞增三故以弧分三乘減二折半得廣廣恆加二爲長以此類推則十一率以弧分四乘減二折半

爲廣加二爲長十三率以弧分五乘減二爲廣加二爲長法亦一貫則以此長廣相乘爲帶縱平方冪七率乘之爲帶縱立方積七除之八除之可得九率而所有之帶縱立方積爲弧分自乘又九乘減四七率乘之所成磬折立方積四之一故置弧分自乘又九乘之減四爲磬折冪七率乘之爲磬折立方積四除之爲帶縱立方積又七除之八除之即得九率



如圖甲丙爲弧分甲乙丙丁爲弧分自乘正方形甲己爲三倍弧分甲戊己庚爲三倍弧分自乘正方形卽甲乙丙丁方形之九倍辛子己癸小方隅積四其邊辛己爲二以甲己減辛己折半於丑爲三倍弧分減二折半之數丑寅爲三倍弧分減二折半又加二之數丑寅同丑己丑寅辛壬帶縱平方冪爲甲戊辛子癸庚磬折冪四之一若同以七率爲高則立積亦爲四之一矣

十一率以下數遞進而按位乘除則無異則十一率以四倍弧分減二折半爲廣加二爲長之面冪與十六倍弧分自乘方又減四之磬折冪十三率以五倍弧分減二折半爲廣加二爲長之面冪與二十五倍弧分自乘

方又減四之磬折冪皆爲四之一至億萬率無不相同故以八乘矢爲三率卽爲弧分自乘數弦求弧通弦之二率本與弧分局故卽以通弦自乘爲弧分自乘以求諸率矢求弧則本無弧分數而弧求矢術本以弧分自乘四除二除卽八除爲矢三率則卽用八乘矢爲弧分自乘數以求諸率也置弧分自乘數減四三率乘之四除之又三除之四除之爲五率置弧分自乘數四乘之減四五率乘之四除之又五除之六除之爲七率置弧分自乘數九乘之減四七率乘之四除之又七除之八除之爲九率以此遞求其乘數皆遞加自乘數其減數皆爲四而除數則與弧求矢同其一率遞除降位及直以三率乘之不復減四其理亦同既得諸率以之相加卽得三率全數弧分既同二率則以一率乘

三率開方而得二率卽爲通弧之數正矢求弧背則比例固同而所用二乘矢數迺弧背作弧分自乘數與通弧作弧分自乘數亦爲一與四弧背求矢本以弧背自乘二除爲矢三率則二乘矢卽如弧背自乘數通弧加弧背一倍則積亦四倍以求諸率當加一四乘今不復加而亦各以少一四除代之也如以前乘除降位之理釋之則弦求弧所用之弦卽弧求弦所得諸率爲二率幾少四率幾多六率幾舉以見例故不及八率以下諸率卽爲第二率亦卽爲第一數如求六率當以第一數內之二率自乘爲第三率內之三率第一數內之二率乘第一數內之四率二乘之爲第三率內所少之五率本以第一數二率幾少四率幾自乘則二率乘二率爲三率卽如二率自乘二率乘四率四率乘二率兩數相并爲五率卽如二率

乘四率二乘之互乘之理可以類推又以第一數乘之則二率自乘再乘為第四率內之四率二率自乘乘第一數內四率三乘之此用同乘法故以三乘併之為第四率內所少之六率各以第一數內之四率乘之第一數內之二率自乘再乘除之則第一數內所少之四率即第二數內所有之四率第一數內四率自乘三乘之二率除之為第二數內所少之六率當以第一數內所多之六率減之方為弦求弧應加之六率而第一數內諸率皆出於二率如以二率齊之則置二率自乘減一二率乘之又以二率自乘減一乘之又三乘之四除之二除之三除之又四除之二除之三除之本以第一數內之四率自乘三乘之二率除之為第二數內所少之六率而求第一數內

之因率本以二率自乘減一又以二率乘之四除之二除之三除之得四率今卽以二率爲用如求四率法乘除之又本當以二率除今於二率自乘減一下省一二率乘以代之餘可類推卽第二數內所
少之六率復以二率自乘減一二率乘之又以二率自
乘減九乘之四除之二除之三除之又四除之又四除
之五除之此卽弧求弦六率之法卽第一數內六率法當相減今
以兩數俱爲立方積則一以二率爲廣二率自乘數少
一爲高三倍二率自乘數少三爲長一以二率爲廣二
率自乘數少一爲高二率自乘數少九爲長兩形高廣
既同則以長數相減爲長以原高廣爲立方形必與兩
體積相減等然兩積之中除數各異當更變其長使除
數相同而後可通爲一以先減而後除故置前形之長

三倍二率自乘數少三以除數相異之四與五迭乘之二與三迭除之得十倍二率自乘數少十為長以後形之長二率自乘數少九減之得九倍二率自乘數少一為長仍以二率為廣二率自乘數少一為高以此立方積四除之二除之三除之又四除之又四除之五除之即為弦求弧應加之六率而二率為廣二率自乘數少一為高相乘之高廣冪四除之二除之三除之即第二數內之四率則用四率之數即如用高廣相乘四除之二除之三除之之數故惟以二率自乘九乘減一四率乘之四除之又四除之五除之而得應加之六率也矢求弧所用之矢即弧求矢所得諸率為三率幾少五率

幾多七率幾卽爲第三率亦卽爲第一數如求七率當以第一數內之三率自乘爲第五率內之五率第一數內之三率乘第一數內之五率二乘之爲第五率內所少之七率各以第一數內之五率乘之三率自乘除之則第一數內所少之五率卽第二數內所有之五率第一數內五率自乘二乘之三率除之爲第二數內所少之七率當以第一數內所多之七率減之方爲矢求弧應加之七率而第一數內諸率皆出於三率而三率又爲二率自乘八除之數如亦以二率齊之則置二率自乘以二率自乘減四乘之又以二率自乘減四乘之又二乘之四除之二除之又四除之三除之四除之又四

除之三除之四除之即第二數內所少之七率復以二
率自乘以二率自乘減四乘之又以二率自乘減十六
乘之四除之二除之又四除之三除之四除之又四除
之五除之六除之即第一數內七率亦當相減今以兩
數亦爲立方積則一以二率自乘數爲廣二率自乘數
少四爲高二倍二率自乘數少八爲長一以二率自乘
數爲廣二率自乘數少四爲高二率自乘數少十六爲
長其高廣既同而除數亦異亦變其長使除數相同故
置前形之長二倍二率自乘數少八以除數相異之五
與六迭乘之三與四迭除之得五倍二率自乘數少二
十爲長以後形之長二率自乘數少十六減之得四倍

二率自乘數少四爲長仍以二率自乘數爲廣二率自乘數少四爲高以此立方積四除之二除之又四除之三除之四除之又四除之五除之六除之卽爲矢求弦應加之七率而二率自乘數爲廣二率自乘數少四爲高相乘之高廣冪四除之二除之又四除之三除之四除之卽第二數內之五率則用五率之數卽如用高廣相乘四除之二除之又四除之三除之四除之之數故惟以二率自乘四乘減四五率乘之四除之五除之六除之而得應加之七率也諸數雖異其理與弦悉同其弦自八率以降矢自九率以降取數雖繁而以省乘省除通之以同乘同除合之以異乘同除齊其除數以同乘異除齊其

乘數則弦自九倍二十五倍四十九倍至億萬倍矢自四倍九倍十六倍至億萬倍弦之減數皆爲一矢之減數皆爲四以次遞求無不密合葢於至繁之中得至簡之用爲弧求弦矢之還原皆天地自然之數無所勉强割圜之能事畢矣

割圜解既成之二年朱先生復得割圜密率捷法四卷
於鍾祥李氏蓋乾隆初欽天監監正明圖所解而門人
陳際新所續成者其書釋連比例諸率分弦矢為二術
皆先設百分千分萬分諸弧如本法乘除之棄其畸零
以求合於矢之十二三十五十六弦之二十四八十百
六十八諸數遂謂遞加一數以為除法者特取其易知
而便於記憶則其於立法之原似未盡也然反覆推衍
使弧矢奇耦率可互通鉤隱探賾雜而不越蓋師弟相
承積三十餘年之久推其用心可謂勤且深矣陳氏序
言圜徑求周及弧求弦矢三術為杜德美氏所作餘六
術則明圖氏補之與張先生所傳互異又借弧借弦二

術並見陳氏書中范氏所作其闡合斛余以垜積釋比例而三角及方錐堆三乘以下舊無其術近讀元朱世傑四元玉鑑茭草形段果垜疊藏諸問乃知遞乘遞除之術近古所有而遠西之士尚能守其遺法有足珍者爰弁記之道光建元六月朔日董祐誠